

F. Mannewitz

## Komplexe Toleranzanalysen einfach durchführen

### Complex Tolerance Analyses

**Inhalt** Vor dem Hintergrund steigender Qualitätsanforderungen an technische Produkte, kürzerer Entwicklungszyklen sowie paralleler Entwicklungsprozesse wird es zunehmend wichtiger, frühzeitig eine Aussage über kritische Einflüsse und Risiken in den Baugruppenfunktionen zu erhalten, um eine eventuelle Fehlerbeseitigung möglichst kostenneutral zu gestalten. Eine Methode neben den bereits etablierten Simulationsverfahren in der Entwicklung ist in der Toleranzanalyse gegeben, wo durch die Bestätigung der Funktionsmaßkonzepte gleichzeitig ein Benchmarking hinsichtlich der Fertigungs-, Funktions- und Montagefähigkeit von Baugruppen sichergestellt ist.

**Abstract** Against the background of increasing demands for quality in technical products, shorter cycles of development as well as parallel development processes it becomes more and more important to receive statements about critical influences and risks in the component functions at an early stage in order to make a potential fault clearance as cost neutral as possible. One method besides the already established simulation processes in development exists in tolerance analysis. Thereby the confirmation of the function measurement concept is secured. This also is a benchmark for production, function and assembly features of components.

### 1 Einleitung

In den letzten Jahren hat im Maschinen- und Fahrzeugbau die Berechnung von Toleranzauswirkungen zunehmend an Bedeutung gewonnen. Insbesondere in der Automobil- und Zuliefererindustrie hat man erkannt, dass neben den bereits etablierten Methoden wie der Finiten-Element-Methode (FEM), dem Digital Mock up (DMU) und anderen Simulationsverfahren, die Toleranzanalyse an funktions- und kundenrelevanten Kriterien während des Produktentstehungsprozesses von entscheidender Bedeutung im heutigen Wettbewerb sein kann.

Dieses drückt sich auch durch die Forderungen innerhalb der VDA6, QS9000 sowie TS16949 aus, welche den Fokus u.a. verstärkt auf statistische Methoden richten.

Im Rahmen der Toleranzanalyse gilt es, vor allem innerhalb eines fachübergreifenden Simultaneous Engineering-Teams, kurz SE-Team, Funktionszusammenhänge so zu interpretieren, dass sie dem späteren Anbau- und Montagekonzept realitätsnah entsprechen.

Unter Anwendung dieser Zusammenhänge, welche neben den Bauteiltoleranzen auch die Vorrichtung- und Montagetoleranzen berücksichtigen sollten, wird dann die Maßkettenstruktur generiert.

Diese ermöglicht dann unter Zuordnung der jeweiligen Fertigungstoleranzen eine Aussage hinsichtlich des zu erfüllenden Funktions-

maßes einer Baugruppe in der Worst-case-Betrachtung.

Basierend auf diesem Informationsstand kann dann unter einer weiteren Zuordnung der Fertigungsqualitäten der einzelnen Maßkettenglieder in Form der Fertigungsverteilung, Prozessfähigkeit und -kennwertes eine statistische Analyse durchgeführt werden. Dieses Ergebnis liefert dann eine realitäts- und praxisnahe Aussage über die Anzahl der prozesssicher eingehaltenen funktions- bzw. kundenrelevanten Kriterien der Baugruppen.

Leider ist die Durchführung solcher notwendigen Toleranzanalysen in der Regel eine relativ komplizierte Aufgabenstellung, da die meisten technischen Funktionszusammenhänge nicht linear bzw. eindimensional abzubilden sind. So leisten auch die gegenwärtig am Markt erhältlichen Programmsysteme keine bzw. eine nur sehr unzureichende Hilfestellung zur Ermittlung des Funktionszusammenhangs.

Dieser Beitrag soll einen graphischen Lösungsansatz aufzeigen, mit dem unter Variation der Geometrieparameter nichtlineare Funktionszusammenhänge schnell und einfach zu ermitteln sind, um damit komplexe Toleranzanalysen einfach durchzuführen.

### 2 Berechnung von Maßketten

Eine Maßkette lässt sich im allgemeinen durch die Funktion Gl.(1) beschreiben.

$$M_0 = f(M_1, M_2, \dots, M_k) \quad (1)$$

Wenn sich die Maßkette in der Ebene oder im Raum als geschlossener Vektorzug darstellt, spricht man von einer mehrdimensionalen, bzw. nichtlinearen Maßkette.

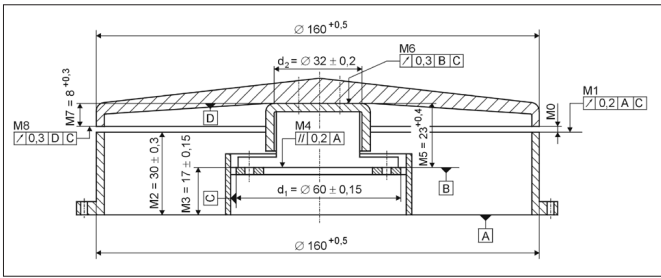
$$M_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot M_i \quad (2)$$

So werden in Gl.(2) die nichtlinearen Einflüsse der jeweiligen tolerierten Einzelmaße  $M_i$  auf das Schließmaß  $M_0$  durch die Linearitätskoeffizienten  $\alpha_i$  berücksichtigt, z.B. beim trigonometrischen oder Hebelwirkungseinfluss von Einzelmaßen.

Sind die Linearitätskoeffizienten einer Maßkette ausschließlich  $\pm 1$ , dann spricht man von einer eindimensionalen bzw. linearen Maßkette.

#### Autor

Dr.-Ing. Frank Mannewitz  
Geschäftsführer der  
casim Ingenieurleistungen GmbH & Co. KG  
Heinrich-Hertz-Straße 3b  
34123 Kassel  
Tel.: 05 61/8 79 97-0  
Fax: 05 61/8 79 97- 2 50  
E-Mail: mailks@casim.de  
www.casim.de



**Bild 1**  
Prinzipdarstellung eines Axial-Ventilators

Eine klassische lineare zweigliedrige Maßkette ist die Welle/Nabe-Verbindung zur Ermittlung des radialen Funktionsmaßes Spiel-, Press- oder Übergangspassung.

Sowohl bei den linearen wie auch nicht-linearen Maßketten ist ein Maß positiv, wenn sich bei einer Vergrößerung des Maßes  $M_i$  das Funktionsmaß  $M_0$  ebenfalls vergrößert. Und anderenfalls negativ, wenn sich bei einer Vergrößerung des Maßes  $M_i$  das Funktionsmaß  $M_0$  verkleinert [6].

### 3 Toleranzanalyse an einem Axial-Ventilator

Ein Beispiel der Kombination einer ein- und mehrdimensionalen Maßkette ist in Bild 1 gegeben. Hierbei handelt es sich um einen Axial-Ventilator an dem u.a. das Funktionsmaß  $M_0$  „umlaufender Luftspalt zwischen Wandring und Schleuderrad“ sichergestellt sein muss. Der Spalt darf zum einen nicht zu klein sein, da sonst womöglich ein Schleifgeräusch auftritt und zum anderen nicht zu groß, da sonst der Wirkungsgrad des Ventilators abfällt. Daher ist zur Sicherstellung der Funktion  $M_0$  mit  $2 \pm 1$  mm festgelegt.

Die einflussnehmenden Einzelmaße auf den Luftspalt  $M_0$  sind hier die Höhe des Wandrings  $M_2$ , die Höhe der Motoranbindung im Wandring  $M_3$ , die Höhe der Motoreinheit  $M_5$ , der Abstand Anlagefläche des Rotors zum äußeren Kranz am Schleuderrad  $M_7$  sowie die zugehörigen Lagetoleranzen  $M_1$ ,  $M_4$ ,  $M_6$  und  $M_8$ .

Basierend auf dem hier zugrunde gelegten Tolerierungsgrundsatz des Unabhängigkeitsprinzips nach DIN ISO 8015 [8] sind die Form-

abweichungen  $M_1$ ,  $M_4$ ,  $M_6$  und  $M_8$  als eigenständige Maßkettenglieder zu berücksichtigen. So ist beispielsweise für die Lauftoleranz  $M_1$  das Nennmaß  $N_1 = 0$ , für das obere Abmaß  $es_1 = 0,2$  und für das untere Abmaß  $ei_1 = 0$  mm anzugeben.

Somit ergibt sich die Maßkettengleichung unter Anwendung der Gl.(2) und der Zuordnung positiver und negativer Maße zu:

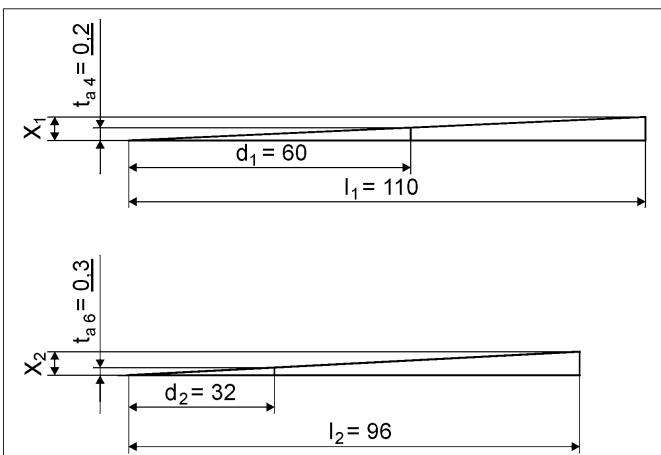
$$M_0 = -a_1M_1 - a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 + a_5M_5 + a_6M_6 - a_7M_7 - a_8M_8 \quad (3)$$

Hierin sind die Linearitätskoeffizienten für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_7 = \alpha_8 = -1$  und  $\alpha_3 = \alpha_5 = 1$ . Dies bedeutet, dass sich bei Änderung der Maße  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_5$ ,  $M_7$  und  $M_8$  das Schließmaß  $M_0$  je nach Richtung um denselben Betrag ändert.

Anders verhalten sich hier die Lagetoleranzen  $M_4$  und  $M_6$ ; diese wirken sich ungleich  $\pm 1$  auf  $M_0$  aus. Damit steht der Konstrukteur vor der Aufgabe, die hierfür notwendigen Linearitätskoeffizienten  $\alpha_4$  und  $\alpha_6$  zu ermitteln.

Für die Ermittlung von Linearitätskoeffizienten steht ein allgemein gültiger Lösungsweg zur Verfügung, nämlich die Linearisierung von Funktionen mittels dem „totalen Differential“ [10]. Hierbei wird die Funktion  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  in der unmittelbaren Umgebung des Flächenschwerpunktes  $P(x_0, y_0, z_0)$  durch eine lineare Funktion ersetzt, nämlich das totale Differential der Funktion Gl.(4).

$$\Delta y = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_{0i}} \cdot \Delta x_i \right) \quad (4)$$



**Bild 2**  
Geometrische Ermittlung der Linearitätskoeffizienten  $\alpha_4$  und  $\alpha_6$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden für den Flächenschwerpunkt P, auch Arbeitspunkt genannt, gebildet. Und die  $\Delta x_i$  sind die „kleinen“ Abweichungen gegenüber dem Arbeitspunkt. Dementsprechend gilt für die Linearisierung der Zielgröße  $M_0 = f(M_1, M_2, \dots, M_k)$  nach Gl.(4):

$$dM_0 = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial M_0}{\partial x_i} \Big|_{N_1, \dots, N_k} \cdot dx_i \right) \quad (5)$$

Hiernach resultiert die Änderung von  $M_0$  aus dem Produkt des jeweiligen Linearitätskoeffizienten und der Einzeltoleranz. Somit können die Linearitätskoeffizienten wie folgt nach Gl.(6) berechnet werden:

$$\alpha_i = \frac{\partial M_0}{\partial M_i} \Big|_{N_1, \dots, N_k} \quad (6)$$

In den Ableitungen werden die jeweiligen Nennmaße berücksichtigt.

Unter Anwendung der Gl. (6) ergeben sich folgende Ableitungen und damit Linearitätskoeffizienten:

$$\alpha_4 = \frac{\partial M_0}{\partial M_4} \Big|_{N_1, \dots, N_k} = \frac{l_1}{d_1} = \frac{110}{60} = 1,833 \quad (7)$$

und

$$\alpha_6 = \frac{\partial M_0}{\partial M_6} \Big|_{N_1, \dots, N_k} = \frac{l_2}{d_2} = \frac{96}{32} = 3. \quad (8)$$

Hierbei wird unterstellt, dass die Durchmesser  $d_1$  und  $d_2$  sowie die Längen  $l_1$  und  $l_2$  in ihren Nennmaßen konstant bleiben, siehe Bild 2.

Die Linearisierung als allgemeiner Lösungsansatz setzt jedoch immer die Kenntnis der Zielfunktion für  $M_0$  voraus. Ohne sie ist keine Ermittlung der Koeffizienten möglich.

Wenn wie im Beispiel des Ventilators die Aufgabenstellung noch relativ anschaulich ist, können die Linearitätskoeffizienten auch ohne Linearisierung direkt ermittelt werden. So ergeben sich unter Anwendung des Strahlensatzes, siehe Bild 2, die Koeffizienten ebenfalls zu

$$\frac{x_1}{l_1} = \frac{t_{a4}}{d_1} \Rightarrow x_1 = \frac{0,2 \cdot 110}{60} = 0,366 \text{ mm} \Rightarrow \alpha_4 = \frac{0,366}{0,2} = 1,833 \quad (9)$$

und

$$\frac{x_2}{l_2} = \frac{t_{a6}}{d_2} \Rightarrow x_2 = \frac{0,3 \cdot 96}{32} = 0,9 \text{ mm} \Rightarrow \alpha_6 = \frac{0,9}{0,3} = 3. \quad (10)$$

Das Nennschließmaß  $N_0$  berechnet sich für den Axial-Ventilator gemäß Bild 1 und 2 wie folgt

$$N_0 = -N_1 - N_2 + N_3 + \frac{l_1}{d_1} \cdot N_4 + N_5 + \frac{l_2}{d_2} \cdot N_6 - N_7 - N_8 \quad (11)$$

Das Nennschließmaß ergibt sich hier zu  $N_0 = 2,0$  mm.

Jetzt, wo der Funktionszusammenhang über die Linearitätskoeffizienten geklärt ist, kann die eigentliche Toleranzanalyse durchgeführt werden.

$$P_0 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot G_{0_{\text{pos}_i}} - \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \cdot G_{0_{\text{neg}_j}} \quad (12)$$

$$P_U = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot G_{U_{\text{pos}_i}} - \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \cdot G_{U_{\text{neg}_j}} \quad (13)$$

Unter Anwendung der Gln.(12) und (13) kann das arithmetische Höchstschließmaß  $P_0 = 4,117$  mm und Mindestschließmaß  $P_U = 0,75$  mm berechnet werden. Die Differenz entspricht einer arithmetischen Schließmaßtoleranz  $T_a = 3,367$  mm. Diese kann auch mittels der Gl.(14) direkt berechnet werden.

$$T_a = \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot t_{a_i} \quad (14)$$

Dieses Ergebnis erfasst jedoch nur die einseitige Betrachtung des resultierenden Luftspaltes. In dem hier besonderen Beispiel Axial-Ventilator wirken sich die Lagetoleranzen  $M_4$  und  $M_6$  umlaufend auf den Luftspalt aus. Dementsprechend würden sich bei der Luftspaltermittlung auf der gegenüberliegenden Wandringseite die Lagetoleranzen  $M_4$  und  $M_6$  mit negativen Vorzeichen auswirken. Wenn wie im Beispiel gefordert der Luftspalt umlaufend sichergestellt werden muss, gilt es hier eine beidseitige Betrachtung des Luftspaltes durchzuführen.

Dies würde erreicht, wenn die beiden Maßkettenglieder  $M_4$  und  $M_6$  zweimal, jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen in der Maßkettengleichung berücksichtigt werden. Damit ergibt sich die folgende Zielfunktion für den zu ermittelten umlaufenden Luftspalt.

$$M_0 = -\alpha_1 M_1 - \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 - \alpha_4^* M_4^* + \alpha_5 M_5 + \alpha_6 M_6 - \alpha_6^* M_6^* - \alpha_7 M_7 - \alpha_8 M_8 \quad (15)$$

Unter Anwendung der Gln.(12) und (13) kann das arithmetische Höchstschließmaß  $P_0 = 4,117$  mm und Mindestschließmaß  $P_U = -0,517$  mm des umlaufenden Luftspaltes berechnet werden. Das ergibt eine arithmeti-

| Verteilung                             | Pa [%]   | $\sigma^2$          | cp      |
|--|----------|---------------------|---------|
| Rechteck                               | 100      | $\frac{t^2}{12}$    | 0,57735 |
| Trapez<br>Seitenverhältnis<br>1/3 zu 1 | 100      | $\frac{5}{108} t^2$ | 0,77459 |
| Dreieck                                | 100      | $\frac{t^2}{24}$    | 0,81649 |
| Normal                                 | 99,73002 | $\frac{t^2}{36}$    | 1,00000 |
| Normal                                 | 99,9936  | $\frac{t^2}{64}$    | 1,33333 |

**Tabelle 1**  
Fertigungsverteilungsarten und  
Parameter [5]

sche Schließmaßtoleranz von  $T_a = 4,633$  mm. Die Schließmaßtoleranz ist gegenüber der einseitigen lokalen Betrachtung um den Betrag der beiden Verkippungen, ausgelöst von  $M_4$  und  $M_6$ , größer.

Dieses Beispiel mit einer mehrfachen Auswirkung von Lagetoleranzen ist jedoch kein Einzelfall, da solche Funktionsauswirkungen von Lagetoleranzen häufiger in technischen Systemen festzustellen sind.

Das Ergebnis  $P_U$  der beidseitigen Betrachtung zeigt, dass die Funktion des axialen Luftspaltes nicht sichergestellt ist, da sich eine Übergangspassung mit 0,517 mm Überdrückung einstellt.

Bei einer reinen arithmetischen Toleranzberechnung, bestände für den Konstrukteur die Forderung entweder die Abmaße zu korrigieren oder eine Toleranzeinengung der Maßkettenglieder vorzunehmen. Letzteres würde zwangsläufig auch die Fertigungskosten drastisch ansteigen lassen.

#### 4 Statistische Toleranzanalyse des Axial-Ventilators

Vor dem Hintergrund, dass der Konstrukteur bereits in der konstruktiven Auslegungsphase die spätere Fertigung der Einzelteile sowie die Funktion der Baugruppen bei in Serienfertigung gefertigten Bauteilen sicherstellen muss, reicht eine arithmetische Verifizierung der Konstruktion nicht aus. Er benötigt den Nachweis über die konstruktive Erfüllung hinsichtlich der geforderten Funktionsqualität. Eine Aussage „was brauche ich und was kann ich“, kann die statistische Toleranzanalyse geben, um möglichst frühzeitig kritische Einflüsse und Risiken innerhalb der späteren Realisierung unter Serienbedingungen zu erfassen.

Zur Ermittlung der statistischen Schließmaßtoleranz  $T_s$  des umlaufenden Luftspaltes werden im Vorfeld der Berechnung die Einzeltoleranzen fertigungsspezifische Einflussgrößen in Form von Fertigungsverteilungen und damit Prozessparameter zugeordnet.

Für das Beispiel Axial-Ventilator wird unterstellt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Istmaße, hier als Fertigungsverteilungen bezeichnet, der zehn Maßkettenglieder trapez-

verteilt seien mit den Parametern nach Tab. 1. Selbstverständlich bietet dieser Lösungsansatz auch die Möglichkeit die Verteilungstypen innerhalb einer Toleranzanalyse unterschiedlich zu variieren. Doch empfiehlt es sich, bei der Wahl des Verteilungstyps den Langzeittrend des Prozessverlaufes, beispielsweise durch Werkzeugverschleiß oder Prozessschwankungen durch eine Trapezverteilung abzubilden.

Neben den in Tab. 1 angegebenen symmetrischen Verteilungstypen existieren auch asymmetrische Verteilungen, so z.B. logarithmische Normalverteilungen für Rundlaufabweichungen von rotationssymmetrischen Flächen oder auch Rayleigh-Verteilungen bei Vorlage von Exzentrizität, Koaxialität oder Positionstoleranzen. Des Weiteren können sich auch Mischverteilungen erster und zweiter Art ausbilden [4].

Unter Nutzung der Fehlerfortpflanzung nach Gauß mit Gl.(16) lässt sich die Standardabweichung, bzw. Streuung des Luftspaltes  $M_0$  berechnen [2], [7]. Diese ergibt sich unter den zuvor genannten Randbedingungen zu  $\sigma_0 = 0,3547$  mm.

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (16)$$

Die hier angewandte Methode hat als Hintergrund den „zentralen Grenzwertsatz“ der Statistik. Hiernach verteilt sich die Summe beliebiger unabhängiger Verteilungen bei einer Anzahl  $\geq 4$  hinreichend genau einer Normalverteilung. Gemäß der standardisierten Normalverteilung, die für  $\mu = 0$  und für  $\sigma = 1$  ausgewertet vorliegt [3], ist die Quantil  $u = 3,0$  bei einer Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a = 99,73002$  %, welches mit einer Prozessfähigkeit  $c_p = 1,0$  korrespondiert. Ist  $u = \pm 4,0$  bei einer Annahmewahrscheinlichkeit  $P_a = 99,9936$  % korrespondiert dies mit der Prozessfähigkeit  $c_p = 1,33$ .

$$T_s = 2 \cdot u \cdot \sigma_0 \quad (17)$$

Unter Anwendung der Gln.(16) und (17) kann die statistische Schließmaßtoleranz für die Prozessfähigkeit  $c_p = 1,33$  mit  $T_s = 2,838$  mm berechnet werden.

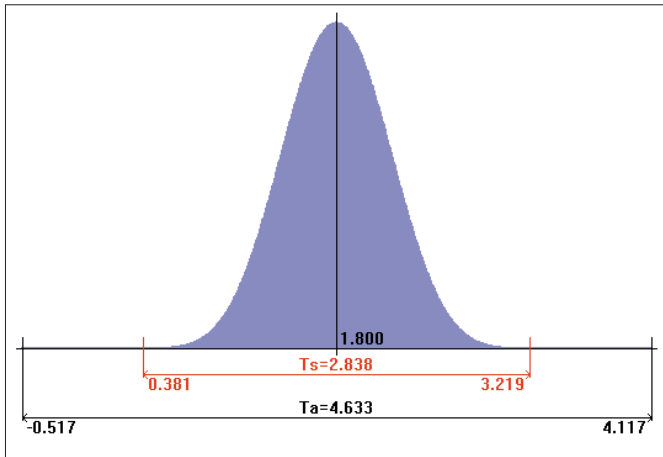


Bild 3

Dichtefunktion des Funktionsmaßes Luftspalt

genüber der arithmetischen Berechnung sichergestellt ist, da das kleinste Spiel mit 0,381 mm kein Schleifgeräusch erzeugt.

Jedoch zeigt die Beurteilung der Prozessfähigkeit, dass, bezogen auf die Funktionsvorgabe, der umlaufende Luftspalt nicht prozesssicher eingehalten wird. Zur Sicherstellung der Prozessfähigkeit gibt es drei Lösungsalternativen. Die Fertigungsprozesse der Maßkettenglieder müssten optimiert bzw. gezielt, die Einzeltoleranzen eingengt werden oder die Qualitätsvorgabe müsste aufgeweitet werden, z.B. auf  $M_0 = 2 \pm 1,65$  mm.

So gilt es, ein Optimum zwischen der Funktionsanforderung und den hierfür notwendigen Fertigungskosten herzustellen, welches ausschließlich durch eine statistische Toleranzanalyse verifiziert werden kann.

Das gezeigte Beispiel spiegelt zahlreiche Konstruktionen aus der Praxis wider, welche nach der Verifizierung durch eine arithmetische Toleranzanalyse nicht funktionsfähig sein können und dennoch umgesetzt werden. Mit dem Ergebnis, dass die Serienfertigung prozessfähig bzw. bedingt prozessfähig ist, da die statistischen Gesetzmäßigkeiten hier zum Tragen kommen.

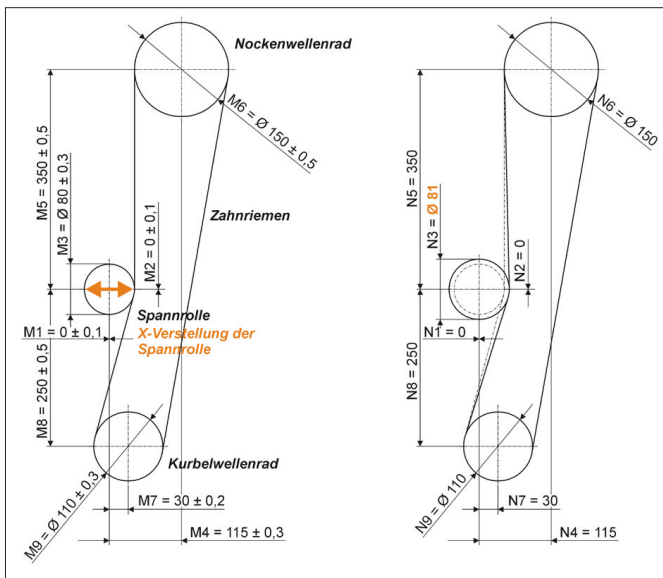


Bild 4

Prinzipdarstellung eines Steuertriebes

## 5 Aufgabenstellung Steuertrieb

In Bild 4 ist in der linken Darstellung ein Steuertrieb dargestellt. Diese Darstellung soll den simplifizierten Steuertrieb eines Verbrennungsmotors abbilden. Das Umschlingungsbild des Zahnriemens zeigt im unteren Teil das Kurbelwellenrad und im oberen Teil das Nockenwellenrad. Die Darstellung soll für den aufgesetzten Zahnriemen die neutrale Faser aufzeigen. Auf die betriebsbedingten Parameter gespannt wird der Zahnriemen durch die Spannrolle, welche in X-Richtung verschoben werden kann.

Für die nachfolgende Toleranzberechnung werden die Lagerspiele der Räder und Rolle, wie auch das Setzverhalten sowie die thermischen Einflüsse vernachlässigt.

Die Aufgabe für den Konstrukteur besteht nun darin, die notwendige X-Verstellung zum Spannen des Zahnriemens unter den hier vorliegenden Fertigungstoleranzen zu berechnen, um damit die Länge des Langloches vom Spannrollenhalter festzulegen.

Die exakte Gesamtlänge des Zahnriemens ergibt sich, hier mittels CAD ermittelt, für dieses Beispiel zu  $L = 1626,1341$  mm. Hier würde dann ein Zahnriemen mit einer Nennmaßlänge in der neutralen Faser gemessen von 1626 mm gewählt. Die Fertigungstoleranz der Gesamtlänge wird für die nachfolgende Beispielrechnung vernachlässigt, ebenso wird unterstellt, dass der Zahnriemen nicht elastisch ist.

Um die Länge des Langloches berechnen zu können, wird zunächst die theoretische Längenänderung des Zahnriemens, basierend auf den neun geometrischen Einflussgrößen, berechnet. Damit wird die Gesamtlänge des Zahn-

$$C_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot C_i \quad (18)$$

Das Mittenmaß von  $M_0$  berechnet sich nach Gl.(18) zu  $C_0 = 1,8$  mm. Um dieses Mittenmaß streut dann symmetrisch das resultierende Funktionsmaß  $M_0$  mit  $\pm T_s/2$ , siehe Abb. 3.

Für die Zeichnungsangabe wird jetzt noch das sogenannte Nennschließmaß  $N_0$  benötigt, dieses berechnet sich allgemein nach Gl.(19) zu  $N_0 = 2,0$  mm.

$$N_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot N_i \quad (19)$$

Das Ergebnis ist identisch mit dem des angewandten Strahlensatzes nach Gl.(11).

Damit kann das Funktionsmaß des Luftspaltes für eine Prozessfähigkeit von  $c_p = 1,33$  mit  $2 \cdot \frac{1,219}{1,619}$  angegeben werden. D.h., dass 99,9936 % der komplettierten Axial-Ventilatoren einen umlaufenden Luftspalt zwischen 0,381 und 3,219 mm aufweisen.

Zu beachten ist in den Gln. (12) bis (16), (18) und (19), dass die Linearitätskoeffizien-

teils als Betragsgröße und teils als absolute Größe einfließen.

Die Berechnung der Prozessfähigkeit  $c_p$  für das resultierende Funktionsmaß  $M_0$ , welche das Verhältnis der Breite der resultierenden Dichtefunktion zur Funktionstoleranz erfasst, bezogen auf die hier gegebene Qualitätsvorgabe  $2 \pm 1$  mm, ergibt jedoch nach Gl.(20) einen geringeren Wert mit  $c_p = 0,939$ .

$$c_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma_0} \quad (20)$$

$$c_{pk} = \frac{G_{00} - C_0}{3 \cdot \sigma_0} \text{ bzw. } \frac{C_0 - G_{U0}}{3 \cdot \sigma_0} \quad (21)$$

Die Verschiebung der resultierenden Dichtefunktion zur nächstliegenden Funktionstoleranzgrenze, hier  $G_{U0} = 1$ , gibt der Prozessfähigkeitskennwert  $c_{pk}$  wieder. Dieser ergibt sich hier unter Anwendung der Gl.(21) zu  $c_{pk} = 0,751$ . Der kleinere Wert gegenüber der Prozessfähigkeit zeigt, dass das Mittenmaß  $C_0 = 1,8$  mm zum Nennschließmaß  $N_0 = 2$  mm verschoben ist.

Das Ergebnis  $P_0$  der statistischen Toleranzanalyse der beidseitigen Betrachtung zeigt, dass die Funktion des axialen Luftspaltes ge-



riemens zum gesuchten Funktionsmaß  $M_0$ . Abhängig ist das Funktionsmaß  $M_0$  von:

$$M_0 = f(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9). \quad (22)$$

Wie sich dabei die Funktionszusammenhänge bzw. die Abhängigkeiten der neun Maßkettenglieder darstellen, ist nicht transparent zu ersehen. Damit stellt sich für diese ebene Aufgabenstellung die Frage, wie die Maßkettengleichung aussieht, d.h., welche mathematische Zielfunktion  $M_0$  hat?

## 6 Geometrische Ermittlung der Linearitätskoeffizienten

Für das Beispiel des Axial-Ventilators konnten unter Anwendung des Strahlensatzes die Linearitätskoeffizienten relativ einfach bestimmt werden. In dem Beispiel des Steuertriebes ist das schon etwas komplizierter. Zur Ermittlung der benötigten neun Linearitätskoeffizienten müsste der Konstrukteur jetzt einen aufwändigen analytischen Lösungsansatz verfolgen.

Um hier den alternativen Lösungsansatz vorzustellen, gilt es zunächst sich den Linearitätskoeffizienten allgemein etwas genauer anzuschauen. Der Linearitätskoeffizient beschreibt den Einfluss des jeweils gerade betrachteten Maßkettengliedes auf das gesuchte Funktionsmaß. Dementsprechend kann durch eine geringe Änderung eines Maßkettengliedes der Einfluss direkt durch eine Funktionsmaßänderung bestimmt werden.

Unter der Voraussetzung, dass die restlichen Maßkettenglieder in ihren Nennmaßen konstant bleiben.

Da es sich hierbei um eine Linearisierung handelt, sollte die Längenänderung der Maßkettenglieder möglichst gering sein, weil sonst ein Fehlerzuwachs in der Linearitätskoeffizientenermittlung auftritt.

Dieser graphische Lösungsansatz, angewandt auf das Beispiel des Steuertriebes, würde exemplarisch für den Durchmesser der Spannrolle bedeuten, dass der Durchmesser von  $N_3 = 80$  mm auf 81 mm vergrößert wird. Demzufolge verändert sich die Gesamtlänge des Zahnriemens von  $L = 1626,1341$  mm auf 1626,2687 mm (Bild 4 rechts). Hiernach wird sich bei einer Vergrößerung von  $N_3$  um 1 mm das gesuchte Maß ebenfalls vergrößern aber nur um 0,1346 mm. Damit steht der Linearitätskoeffizient von  $M_3$  mit  $\alpha_3 = 0,1346$  fest.

D.h., dass bei einer Durchmesseränderung der Spannrolle von  $\pm 0,3$  mm sich die Gesamtlänge des Zahnriemens ebenfalls verändern müsste und zwar um  $\pm 0,0403$  mm.

Es bietet sich für solche Aufgabenstellungen an, die Linearitätskoeffizienten mit Hilfe eines parametrisierten Kinematikmodells unter Anwendung eines CAD-Systems durch Variation der Geometrieparameter schnell und einfach zu ermitteln.

Führt man dieses für das Beispiel des Steuertriebes durch, so erhält man die in Tab. 2 ermittelten Linearitätskoeffizienten.

Die Koeffizienten zeigen dem Konstrukteur direkt den jeweiligen arithmetischen Einfluss eines Maßkettengliedes an. So hat beispielsweise die Y-Achsabstandstoleranz  $t_5$  der Nockenwellenscheibe zur Spannrolle einen 24,7 mal größeren Einfluss auf die Gesamtlänge des Zahnriemens als die Durchmessertoleranz  $t_3$  der Spannrolle. D.h.,  $t_5$  beeinflusst arithmetisch zu 26,76 % die Gesamtlänge und  $t_3$  nur zu 1,08 % (Bild 5).

Diese Kenntnis ermöglicht dem Konstrukteur schon in der Konzeptphase die Verhältnisse der Nominalwerte, sprich Nennmaße, so abzustimmen, dass ein möglichst robustes Design sichergestellt ist. Denn die Linearitätskoeffizienten zeigen ihm gleichzeitig an, wo seine Toleranzen so weit wie möglich sein können und wo sie so eng wie nötig sein müssen.

| Maß | $\alpha$ | Tabelle 2<br>Linearitätskoeffizienten des Steuertriebes |
|-----|----------|---|
| M1  | 0,528    |   |
| M2  | -1,931   |   |
| M3  | 0,134    |   |
| M4  | 0,175    |   |
| M5  | 1,984    |   |
| M6  | 1,658    |   |
| M7  | -0,434   |   |
| M8  | 1,949    |   |
| M9  | 1,618    |   |

Basierend auf diesem Kenntnisstand kann dann die Maßkettengleichung nach Gl.(2) aufgestellt werden.

$$M_0 = 0,528 \cdot M_1 - 1,931 \cdot M_2 + 0,134 \cdot M_3 + 0,175 \cdot M_4 + 1,984 \cdot M_5 + 1,658 \cdot M_6 - 0,434 \cdot M_7 + 1,949 \cdot M_8 + 1,618 \cdot M_9 \quad (23)$$

## 7 Toleranzanalyse des Steuertriebes

Durch Kenntnis der Maßkettengleichung kann nunmehr das Nennschließmaß für die Gesamtlänge des Zahnriemens berechnet werden.

Die Berechnung nach Gl.(19) ergibt für  $N_0 = 1.626,155$  mm. Die Abweichung zum „absoluten“ Ergebnis, welches hier mittels CAD-System ermittelt wurde, ist trotz der Linearisierung nur 0,0209 mm. Der Fehler von 0,0012 % ist für eine Toleranzanalyse vernachlässigbar. Das Mittenmaß  $C_0$  nach Gl.(18) ergibt dasselbe Ergebnis aufgrund der symmetrischen Toleranzvergabe ( $\pm t/2$ ) aller Maßkettenglieder.

Für die Ermittlung der notwendigen X-Verstellung der Spannrolle wird neben dem Nennschließmaß ebenfalls die mögliche Längenänderung des Zahnriemens basierend auf den

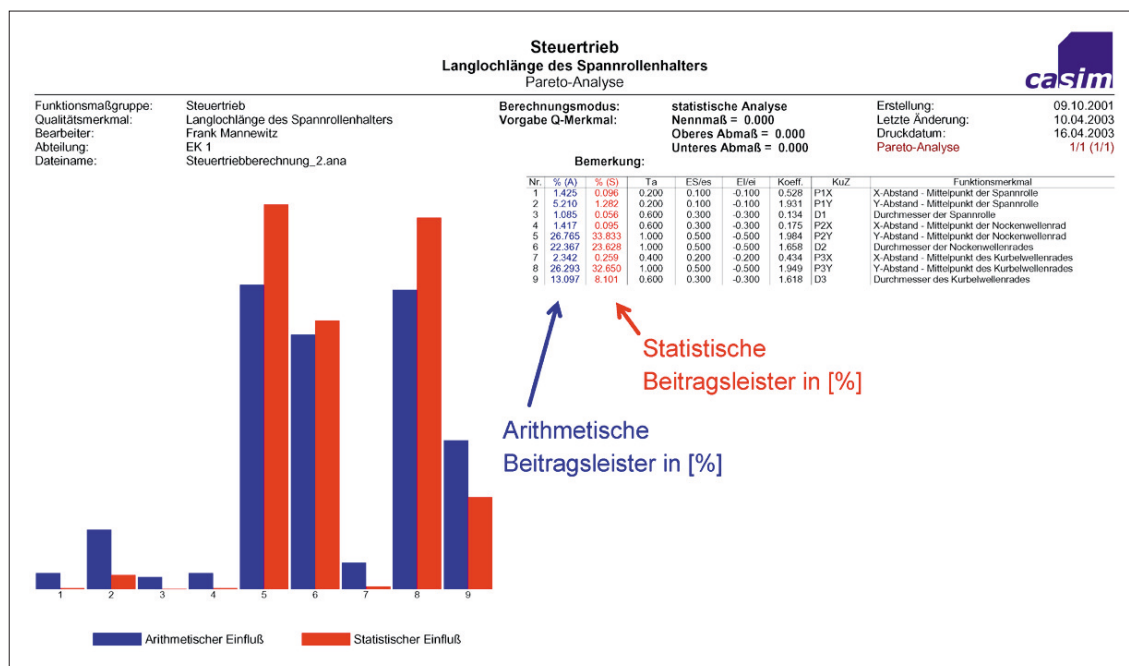


Bild 5

Ermittlung der Beitragsleister für den Steuertrieb mit Hilfe des Programms simtol

Längenänderungen der neun Maßkettenglieder benötigt.

Unter Anwendung der Gl.n.(12) und (13) kann das arithmetische Höchstschließmaß  $P_0 = 1629,861$  mm und das Mindestschließmaß  $P_U = 1622,449$  mm berechnet werden. Dementsprechend ist die arithmetische Schließmaßtoleranz  $T_a = 7,413$  mm.

Für die statistische Toleranzanalyse müssen zunächst die Fertigungsqualitäten der einzelnen Maßkettenglieder festgelegt werden. Ebenso wie bei dem Beispiel des Ventilators soll der Langzeittrend innerhalb der Fertigung mittels einer Trapezverteilung erfasst werden. Dies soll für alle neun Maßkettenglieder gelten.

Damit errechnet sich die Standardabweichung der Zahnriemenlängenänderung mit der in Tab. 1 angegeben Varianz  $\sigma^2 = 5/108 t^2$  nach Gl.(16) zu  $\sigma_0 = 0,7339$  mm.

Des Weiteren wird die Annahmewahrscheinlichkeit für die statistische Schließmaßtoleranz festgelegt. Diese soll mit  $P_a = 99,9936\%$  eine Prozessfähigkeit  $c_p = 1,33$  repräsentieren. Somit liegt der Multiplikator  $u = 4,0$  in Gl.(17) fest. Diese Gleichung angewandt, ergibt eine statistische Schließmaßtoleranz für die Zahnriemenlänge von  $T_s = 5,871$  mm.

Wie die Ergebnisse zeigen, benötigt die statistisch berechnete Gesamtlängenänderung nur 79,19 % der Schließmaßtoleranz gegenüber der arithmetischen.

Darüber hinaus weist die statistische Toleranzanalyse einen veränderten Einfluss der Maßkettenglieder auf  $M_0$  auf. Beeinflusst durch die Annahmewahrscheinlichkeit, die Fertigungsver-

teilung und die statistische Schließmaßtoleranz zeigt z.B. die Y-Achsenabstandstoleranz der Nockenwellenscheibe zur Spannrolle  $t_5$  einen tatsächlich 604 mal größeren Einfluss auf die Gesamtlänge des Zahnriemens als die Durchmesser-toleranz der Spannrolle  $t_3$ . D.h.,  $t_5$  beeinflusst statistisch zu 33,83 % die Gesamtlänge und  $t_3$  nur zu 0,056% (Bild 5).

Die weiteren Beitragsleister in Bild 5 zeigen deutlich die signifikanten Einflussgrößen in der Konstruktion des Steuertriebes auf.

Dieses sind Erkenntnisse, die für jeden Konstrukteur wie auch die Fertigung zwingend notwendig sind, um zum einen die Konstruktion mit prozessgerechten Toleranzen zu versehen und zum anderen bei Problemstellungen in der Fertigung die Hauptbeitragsleister in einer transparenten Baugruppenkonstruktion zu kennen.

Jetzt, wo die arithmetisch und statistisch ermittelte Längenänderung des Zahnriemens vorliegt, kann hierauf basierend der benötigte Vorstellweg der Spannrolle berechnet werden.

Dieser ergibt sich aus dem Verhältnis der Längenänderung des Zahnriemens zu dem Linearitätskoeffizienten der X-Verstellung der Spannrolle.

Dementsprechend ist die arithmetische Langlochlänge der Spannrollenhalterung:

$$\frac{T_a}{\alpha_1} = \frac{7,413}{0,528} = 14,039 \text{ mm} \quad (24)$$

und die statistische

$$\frac{T_s}{\alpha_1} = \frac{5,871}{0,528} = 11,119 \text{ mm.} \quad (25)$$

Das statistische Ergebnis lässt hier die Auslegung einer kürzeren Spannrollenhalterung zu, wodurch wiederum Material, Gewicht, Bauraum und nicht zuletzt Kosten eingespart werden können.

Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass ungeachtet der arithmetischen bzw. statistischen Toleranzanalyse zur eigentlichen Berechnung des Funktionsmaßes die Zielfunktion für  $M_0$ , d.h. die Maßkettengleichung bekannt sein muss. Wenn das nicht der Fall ist, was in der Praxis sehr häufig vorkommt, hat der Konstrukteur einen enormen Mehraufwand im Rahmen der Toleranzanalyse zu leisten.

Leichter und schneller ist hier die Lösung mittels Variation der Geometrieparameter. Nicht zuletzt, da der Konstrukteur die mathematischen Funktionszusammenhänge nicht kennen bzw. ermitteln muss.

## 8 Zusammenfassung

Der Lösungsansatz des zentralen Grenzwertsatzes bzw. der Fehlerfortpflanzung nach Gauß zur Berechnung der statistischen Schließmaßtoleranz stellt hier eine gute und einfach anzuwendende Methode dar, um Funktionsmaße zu einem möglichst frühen Zeitpunkt in der Entwicklung abzusichern. Neben diesem Ansatz gibt es die Simulation nach dem Monte-Carlo-Verfahren, wo mit Hilfe eines Zu-

fallsgenerators die Überlagerung von Verteilungen simuliert wird und darüber hinaus die Faltung [1], [9], wo durch Lösung eines sogenannten Faltungsintegrals die Schließmaßverteilung aus der Überlagerung jeweils zweier unabhängiger Verteilungen ermittelt wird [4].

Sowohl das Monte-Carlo-Verfahren als auch die Faltung setzen aufgrund des hohen Rechenaufwandes sinnvollerweise einen Rechereinsatz voraus.

Unabhängig vom Lösungsverfahren zur Ermittlung der statistischen wie auch arithmetischen Schließmaßtoleranz ist das Aufstellen der Maßkette zwingend notwendig. Diese Aufstellung kann jedoch kein gegenwärtig am Markt erhältliches Programmsystem selbständig bzw. automatisch leisten.

Diese Aufgabe muss der Konstrukteur in der Regel mit seinen Algebra- und Geometriekenntnissen und verschiedenen Hilfsmitteln selbst lösen. Das Verfahren der Variation von geometrischen Parametern hat gezeigt, dass hier mit einfachsten Mitteln und ohne Kenntnis der Zielfunktion für die Baugruppenfunktion eine Toleranzanalyse an einer komplexen Baugruppe schnell und einfach möglich ist.

So eignet sich eine ganzheitlich durchgeführte Toleranzanalyse hervorragend zur Validierung von Konzeptalternativen, bei der im ersten Schritt die Erfahrungswerte der Fertigung mit einfließen, um damit eine wirtschaftliche und qualitätsorientierte Lösung zu erzielen.

### Literatur

- |  |  |
|--|--|
| [1] Mannewitz, F.: <i>Rechnerunterstützte Toleranzgebung und -optimierung, Konstruktion, Jahrgang 48, Heft 7/8, Seite 205–211, 1996</i>  | <i>Statistische Tolerierung – Begriffe, Anwendungsrichtlinien und Zeichnungsangaben, Berlin: Beuth 1974</i>  |
| [2] Klein, B.; Mannewitz, F.: <i>Statistische Tolerierung, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1993</i>   | [7] DIN 7186 Blatt 2 (Entwurf), <i>Statistische Tolerierung – Grundlagen für Rechenverfahren, Berlin: Beuth 1980</i>                                   |
| [3] Mannewitz, F.: <i>Prozessfähige Tolerierung von Bauteilen und Baugruppen ein Lösungsansatz zur Optimierung der Werkstattfertigung im Informationsverbund zwischen CAD und CAQ, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 20, Nr. 256, 1997</i> | [8] DIN ISO 8015: <i>Technische Zeichnungen; Tolerierungsgrundsatz für Form-, Richtungs-, Orts- und Lauf-toleranzen, Beuth-Verlag, Berlin, 1986</i>    |
| [4] Simunovic, M.; Mannewitz, F.: <i>Schulungsunterlagen: Statistische Tolerierung in der Serienfertigung, casim Ingenieurleistungen, 2002</i>   | [9] Trumpold, H.; Beck, C.; Richter, G.: <i>Toleranzsysteme und Toleranzdesign – Qualität im Austauschbau, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1997</i> |
| [5] Kirschling, G.: <i>Qualitätssicherung und Toleranzen, Berlin: Springer, 1988</i>   | [10] Papula, L.: <i>Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1992</i>              |
| [6] DIN 7186 Blatt 1,  |  |

| Formelzeichen  |
|--|
| $\alpha_i$ Linearitätskoeffizient  |
| $\sigma^2$ Varianz   |
| $\sigma_0$ Standardabweichung des Funktionsmaßes   |
| $c_p$ Prozessfähigkeit   |
| $c_{pk}$ Prozessfähigkeitskennwert   |
| $C_i$ Toleranzmittenmaß  |
| $C_0$ Mittenmaß des Funktionsmaßes   |
| $e_{s_i}$ oberes Abmaß (Außenmaß)  |
| $e_{i_i}$ unteres Abmaß (Außenmaß)   |
| $ES_i$ oberes Abmaß (Innenmaß)   |
| $EI_i$ unteres Abmaß (Innenmaß)  |
| $G_0$ Höchstmaß  |
| $G_U$ Mindestmaß   |
| $M_i$ toleriertes Maß  |
| $M_0$ Schließ- bzw. Funktionsmaß   |
| $k, n, m$ Anzahl der Maßkettenglieder  |
| $N_0$ Nennmaß des Schließmaßes   |
| $P_a$ Annahmewahrscheinlichkeit  |
| $P_0$ Höchstschließmaß (oberes Passmaß)  |
| $P_U$ Mindestschließmaß (unteres Passmaß)  |
| $t_{a_i}$ arithmetische Maßkettengliedertoleranz   |
| $T_a$ arithmetische Schließmaßtoleranz   |
| $T_s$ statistische Schließmaßtoleranz  |
| $u$ Annahmewahrscheinlichkeit in $\sigma$ -Einheiten der standardisierten Normalverteilung |